

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2026
CLASA a XII- a

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

Subiectul I (20 puncte)

Să se arate că

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} (1-x)^2 \cdot e^{-x}, & x \in (-\infty, 1] \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

admite primitive pe \mathbb{R} și să se determine primitiva F care verifică relația

$$F(e) + F(0) = \frac{-2(e+3)}{3e}.$$

Subiectul II (20 puncte)

Fie (G, \cdot) un grup multiplicativ cu elementul neutru $e \in G$. Dacă $a, b \in G$ cu proprietățile $a^3 = e$ și $a^2 b a^{-2} = b^4$, arătați că $b^{63} = e$.

Subiectul III (25 puncte)

Se consideră mulțimea $M = (-\infty, 1)$. Pentru fiecare pereche $(x, y) \in M \times M$ notăm cu

$$x \circ y = \frac{2025 - xy}{2026 - x - y}.$$

- Arătați că funcția $(x, y) \rightarrow x \circ y$ definește o lege de compoziție pe M .
- Demonstrați că legea de compoziție " \circ " este comutativă și asociativă, dar nu are element neutru.

Subiectul IV (25 puncte)

Determinați $\int \frac{x^2 - x - 1}{(x^2 + x + 1)^3} dx$, unde $x > 0$.